Universidade do Estado do Amazonas

Aritmética – MA14 – PROFMAT

Prof. Alessandro Monteiro/ Prof. Almir Neto

AP1

Instruções: Você tem 120 minutos para completar esta avaliação e só poderá deixar a sala após 60 minutos do seu início. Existem cinco problemas valendo um total dez pontos. Você não pode usar livros, anotações, folhas de rascunho, celulares, calculadoras ou aparelhos similares. **Serão concedidos pontos parciais pelos progressos nas soluções corretas. Todas as respostas devem ser colocadas à caneta.**

Nome: Gabarito

Questões	Pontos
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Manaus, 8 de outubro de 2024

Questão 01 [2,0 ::: (a)=1,25; (b)=0,75]

(a) Se $a+b\neq 0$, mostre que, para todo $n\in\mathbb{N}$,

$$\frac{a^{2n+1}+b^{2n+1}}{a+b}=a^{2n}-a^{2n-1}\cdot b+\cdots-a\cdot b^{2n-1}+b^{2n}.$$

(b) Mostre que 2025 divide

$$1^{2025}+2^{2025}+\ldots+2024^{2025}.$$

Demonstração (a):

Como $x^m-y^m=(x-y)(x^{m-1}+x^{m-2}\cdot y+\ldots+x\cdot y^{m-2}+y^{m-1})$ para quaisquer $x,y\in\mathbb{Z}$ e $m\in\mathbb{N}$ então tomando-se $x=a$, $y=-b$ e $m=2n+1$, onde $n\in\mathbb{N}$, temos que

$$a^{2n+1}-(-b)^{2n+1}=(a-(-b))\left(a^{2n+1-1}+a^{2n+1-2}\cdot(-b)+\ldots+a\cdot(-b)^{2n+1-2}+(-b)^{2n+1-1}\right).$$

Logo, se $a+b\neq 0$ então

$$\frac{a^{2n+1}+b^{2n+1}}{a+b}=a^{2n}-a^{2n-1}\cdot b+\ldots-a.b^{2n-1}+b^{2n}.$$

Demonstração (b):

Pelo item (a) temos que:

$$2025=1+2024\mid 1^{2025}+2024^{2025}$$

$$2025=2+2023\mid 2^{2025}+2023^{2025}$$

$$\vdots$$

$$2025=1012+1013\mid 1012^{2025}+1013^{2025}.$$

Logo,

$$2025\mid 1^{2025}+2^{2025}+\ldots+2024^{2025}.$$

Questão 02 [2,0 ::: (a)=1,00; (b)=1,00]

Considere o número natural a representado, na base 10, por $a = xyxxyx$.

(a) Mostre que $1001|a$.

(b) Mostre que se $x = y = 2$ então o número $xyxxyx$ pode ser escrito como um produto de seis números primos distintos.

Demonstração (a):

Se $a = (xyxxyx)_{10}$ então $a = xyx000 + xyx$. Ou seja,

$a = xyx \cdot (1000+1)$. Logo, $1001 | a$.

Solução (b):

Se $x = y = 2$ então $xyxxyx = 222222 = 2 \cdot (111111)$.

Como, pelo item anterior, $1001 | 222222$ e $(1001, 2) = 1$

então $1001 | 111111$. Assim, por ser $111111 = 111 \cdot 1001$,

temos que $222222 = 2 \cdot (111111) = 2 \cdot 111 \cdot 1001$. Logo,

$222222 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$.

Questão 03 [2,0 ::: (a)=1,00; (b)=0,50; (c)=0,50]

Sejam dados os números naturais a, m e n tais que $1 < a < m < n$.

(a) Mostre que a quantidade de múltiplos de a que existem entre m e n é dada por $\left[\frac{n-1}{a}\right] - \left[\frac{m}{a}\right]$, onde $\left[\frac{n-1}{a}\right]$ e $\left[\frac{m}{a}\right]$ representam, respectivamente, as partes inteiras das divisões de $n-1$ e m por a.

(b) Quantos múltiplos de 7 existem entre 123 e 2025?

(c) Quantos múltiplos de 7 existem entre 343 e 2030?

Demonstração(a): Sejam $a, m, n \in \mathbb{N}$ tais que $1 < a < m < n$. Pela divisão euclidiana temos que $m = a \cdot q_1 + r_1$ e $(n-1) = a \cdot q_2 + r_2$, onde $0 \leq r_1 < a$ e $0 \leq r_2 < a$. Assim, temos que existem q_1 múltiplos de a menores ou iguais a m, e q_2 múltiplos de a menores ou iguais a $(n-1)$. Logo, a quantidade de múltiplo de a estritamente entre m e n pode ser representada por $q_2 - q_1$. Isto é,

$$\left[\frac{n-1}{a}\right] - \left[\frac{m}{a}\right].$$

Solução (b):

$$\left[\frac{2025-1}{7}\right] - \left[\frac{123}{7}\right] = 289 - 17 = 272.$$

Solução (c):

$$\left[\frac{2030-1}{7}\right] - \left[\frac{343}{7}\right] = 289 - 49 = 240.$$

Questão 04 [2,0 ::: (a)=1,50; (b)=0,50]

(a) Sejam $a_1,\ldots,a_n$ números inteiros não nulos. Mostre que existe o número $[a_1,\ldots,a_n]$ e

$$[a_1,\ldots,a_{n-1},a_n]=[a_1,\ldots,a_{n-2},[a_{n-1},a_n]].$$

(b) Encontre $[-56,16,24]$.

Demonstração (a): Suponha a existência de $m=[a_1,\ldots,a_{n-2},[a_{n-1},a_n]]$. Assim, temos que $a_1|m,\ldots,a_{n-2}|m$ e $[a_{n-1},a_n]|m$. Como $a_{n-1}|[a_{n-1},a_n]$ e $a_n|[a_{n-1},a_n]$ então $a_{n-1}|m$ e $a_n|m$. Logo, m é múltiplo comum de $a_1,\ldots,a_{n-1}$ e a_n. E, se r for múltiplo comum de $a_1,\ldots,a_{n-1}$ e a_n então $a_1|r,\ldots,a_{n-2}|r$ e $[a_{n-1},a_n]|r$, uma vez que $a_{n-1}|r$ e $a_n|r$. Logo $m|r$, ou seja, m é também o menor múltiplo de $a_1,\ldots,a_{n-1}$ e a_n. Portanto,

$$m=[a_1,\ldots,a_{n-1},a_n]=[a_1,\ldots,a_{n-2},[a_{n-1},a_n]].$$

Solução (b):

$$[-56,16,24]=[56,[16,24]]=[56,48]=336.$$

Questão 05 [2,0 ::: (a)=1,25; (b)=0,75]

(a) Com quantos zeros termina o número 2025!?

(b) Mostre que 2^{2025} não divide 2025!

Solução(a): Precisamos encontrar a maior potência de 10 que divide 2025!. Como na fatoração de 2025! certamente existem mais fatores 2 do que fatores 5 então basta encontrarmos α tal que $5^{\alpha} \| 2025!$. Para isso podemos usar a fórmula de Legendre - Polignac como segue

$$\alpha = E_5(2025!) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{2025}{5^i} \right]$$

$$= \left[\frac{2025}{5} \right] + \left[\frac{2025}{5^2} \right] + \left[\frac{2025}{5^3} \right] + \left[\frac{2025}{5^4} \right] + \ldots$$

$$= 405 + 81 + 16 + 3 + 0 + \ldots$$

$$= 505.$$

Logo, 2025! termina com 505 zeros.

Solução(b):

De fato, pois se $2^{\beta} \| 2025!$ então

$$\beta = E_2(2025!) = \left[\frac{2025}{2} \right] + \left[\frac{1012}{2} \right] + \left[\frac{506}{2} \right] + \left[\frac{253}{2} \right] +$$

$$+ \left[\frac{126}{2} \right] + \left[\frac{63}{2} \right] + \left[\frac{31}{2} \right] + \left[\frac{15}{2} \right] + \left[\frac{7}{2} \right] + \left[\frac{3}{2} \right] + \ldots$$

$$= 2017.$$