matemáticamonteiro

Soluções ENQ - PROFMAT - 2024 - 2

Manaus, Setembro de 2024

21/09/2024

ENQ – 2024.2 – Gabarito com Pautas

Questão 01 [1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,50; (c)=0,25]

Considere um número natural a representado, na base 10, por $a = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$.

(a) Mostre que a é divisível por 3 se, e somente se, $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ é divisível por 3.

(b) Mostre que a é divisível por 8 se, e somente se, o número $a_2 a_1 a_0$ formado pelos três últimos algarismos de a é divisível por 8.

(c) Encontre todos os números da forma $a = a_5 9411 a_0$ que sejam divisíveis por 24.

Demonstração (b):

$$\underbrace{a}_{\text{é divisível por } 8} \Leftrightarrow \underbrace{a_n a_{n-1} \cdots a_3 a_2 a_1 a_0}_{\text{é divisível por } 8}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{a_n a_{n-1} \cdots a_3 000 + a_2 a_1 a_0}_{\text{é divisível por } 8}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{8 \cdot 125 \cdot (a_n a_{n-1} \cdots a_3) + a_2 a_1 a_0}_{\text{é divisível por } 8}$$

$$\Leftrightarrow a_2 a_1 a_0 \text{ é divisível por } 8.$$

Demonstração (a):

$$\underbrace{a}_{\text{é divisível por } 3} \Leftrightarrow \underbrace{a_n 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0}_{\text{é divisível por } 3}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{a_n(10^n - 1) + a_{n-1}(10^{n-1} - 1) + \dots + a_1(10 - 1) + a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n}_{\text{é divisível por } 3}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n}_{\text{é divisível por } 3}, \text{ pois } 3 \mid 10^n - 1 \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Solução (c): $24 \mid a_5 9411 a_0 \Leftrightarrow 3 \mid a_5 9411 a_0$ e $8 \mid a_5 9411 a_0$, pois $(3,8)=1$.

$\Leftrightarrow 3 \mid a_5 + a_0$ e $8 \mid 11a_0$, pois $9+4+1+1=15$

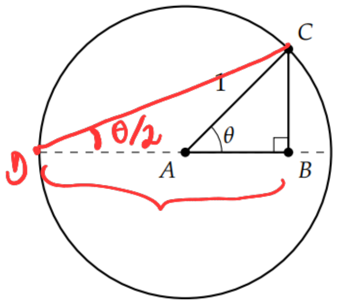
$\Leftrightarrow a_0 = 2$ e $a_5 \in \{1, 4, 7\}$

$\Leftrightarrow a_5 9411 a_0 \in \{194112, 494112, 794112\}$.

ny.

Questão 02 [1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]

Considere um círculo de centro A e raio 1, e um triângulo retângulo ABC conforme a figura abaixo. Denotemos por θ o ângulo $B\hat{A}C$.



Demonstração (a):

$$tg\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{sen\,\theta}{1+\cos\theta},$$

pois $\overline{AD} = 1$ (raio),

$sen\,\theta = \frac{\overline{BC}}{1}$ e $\cos\theta = \frac{\overline{AB}}{1}$ em ΔABC.

Nota: $\underset{\text{INSCRITO}}{\widehat{BDC}} = \frac{1}{2} \cdot \underset{\text{CENTRAL}}{\widehat{BAC}}$.

(a) Use o Teorema do ângulo inscrito para mostrar que $tg\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\text{sen}\,\theta}{1+\cos\theta}$.

(b) Calcule seno, cosseno e tangente de 15°.

Solução (b): Temos:

i) $tg\,15^\circ = tg\left(\frac{30^\circ}{2}\right) = \frac{sen\,30^\circ}{1+\cos 30^\circ} = \frac{1/2}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \boxed{2-\sqrt{3};}$

ii) $sen^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ = 1 \xrightarrow{\div \cos^2 15^\circ} tg^2 15^\circ + 1 = \frac{1}{\cos^2 15^\circ}$

$\Rightarrow 8 - 4\sqrt{3} = \frac{1}{\cos^2 15^\circ}$

$\Rightarrow \cos^2 15^\circ = \frac{1}{8-4\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \cos 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{8-2\sqrt{12}}} = \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4};}$

iii) $sen\,15^\circ = \cos 15^\circ \cdot tg\,15^\circ \Rightarrow sen\,15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \cdot (2-\sqrt{3})$

$= \frac{2\sqrt{6} + 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

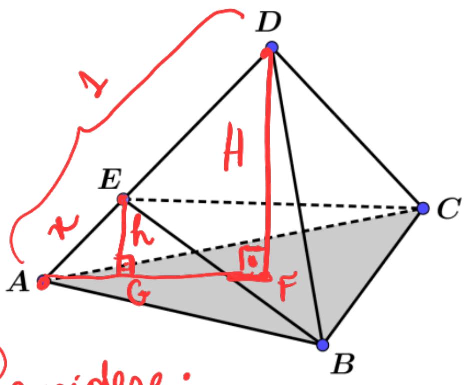
$= \boxed{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.}$

wy:

Questão 03 [1,25]

Sobre a aresta AD de um tetraedro $ABCD$ não necessariamente regular, toma-se um ponto E.

Sabendo que $\overline{AD} = 1$ e que o volume do tetraedro $ABCE$ é $\frac{1}{3}$ do volume do tetraedro $ABCD$, determine $\overline{AE}$.



Solução: Considere:

i) H: altura do tetraedro $ABCD$;

ii) h: altura do tetraedro $ABCE$;

iii) S_{ABC}: área do triângulo ABC;

iv) F: pé da perpendicular $\overline{DF}$ sobre a base ABC;

v) G: pé da perpendicular $\overline{EG}$ sobre a base ABC.

Como $V_{ABCE} = \frac{1}{3} V_{ABCD}$ então $\frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot H$.

Assim, $H = 3 \cdot h$. Usando o fato de que os triângulos AFD e AGE são semelhantes, podemos dizer que $\frac{H}{h} = \frac{1}{\overline{AE}}$. Logo, $\frac{3h}{h} = \frac{1}{\overline{AE}}$. Portanto, $\boxed{\overline{AE} = 1/3.}$

Questão 04 [1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]

Considere a uma constante real positiva e diferente de 1 e a inequação

$$\log_a(x^2 + x + 1) < \log_a(x^2 - 9).$$

(a) Determine as condições de existência da inequação dada, ou seja, os valores reais de x para os quais as expressões que aparecem na inequação fazem sentido.

(b) Sabendo que $x = 4$ é uma solução, determine todos os valores de x que satisfazem a inequação.

Sol(a):

$x^2+x+1>0$ e $x^2-9>0 \iff x^2-9>0$, pois

x^2+x+1 é sempre posit.

$\iff \boxed{x<-3 \text{ ou } x>3.}$

Sol.(b): Como

$\log_a(4^2+4+1) < \log_a(4^2-9) \iff \log_a 21 < \log_a 7$

$\iff 0<a<1.$

Então

$\log_a(x^2+x+1) < \log_a(x^2-9) \iff x^2+x+1 > x^2-9$

$\iff x>-10.$

Portanto, $x<-3$ ou $x>3$ e $x>-10$.

Isto é, $\boxed{-10<x<-3 \text{ ou } x>3.}$

m.p.

Questão 05 [1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]

Cada uma de 5 pessoas A, B, C, D e E escolhe um número de 1 a 10 aleatoriamente e guarda em segredo.

Em seguida, as pessoas A, B, C, D e E, nessa ordem, anunciam seus números, uma de cada vez.

(a) Qual é a probabilidade de que a terceira pessoa a anunciar seja a primeira a repetir um número já anunciado?

(b) Qual é a probabilidade de que pelo menos uma pessoa repita o número escolhido por outra pessoa antes dela?

Solução(a): Temos:

$$\underbrace{C}_{\text{é a primeira a repetir}} \iff \underbrace{A \text{ e } B}_{\text{não repetirem os números}}.$$

logo,

$$\boxed{P(C \text{ ser a primeira a repetir})} = \underbrace{\frac{10}{10}}_{\text{A pode anunciar qualquer número}} \cdot \overbrace{\frac{9}{10}}^{\text{B não pode repetir o número de A}} \cdot \underbrace{\frac{2}{10}}_{\text{C precisa anunciar os números de A ou B}} = \boxed{18\%.}$$

Solução(b):

$$\boxed{P(\text{pelo menos uma pessoa repita})} = 1 - P(\text{ninguém repetir})$$

$$= 1 - \frac{\cancel{10}}{\cancel{10}} \cdot \frac{9}{\cancel{10}_5} \cdot \frac{\cancel{8}^{\cancel{4}\,2}}{\cancel{10}_5} \cdot \frac{7}{\cancel{10}_5} \cdot \frac{\cancel{6}^3}{\cancel{10}_5}$$

$$= 1 - \frac{189}{625}$$

$$= \boxed{\frac{436}{625}.}$$

ny:

Questão 06 [1,25 ::: (a)=0,25; (b)=1,00]

(a) Determine a equação da reta que passa pelos pontos $\left(0, \dfrac{250}{3}\right)$ e $\left(\dfrac{1000}{13}, 0\right)$.

(b) Determine todos os pontos (x, y) da reta do item (a), onde x e y são números naturais.

Sol.(a):

$$\underbrace{r: y = ax + b}_{\text{" equação da reta } r\text{"}} \Rightarrow r: y = \frac{0 - \frac{250}{3}}{\frac{1000}{13} - 0} x + b$$

$$\Rightarrow r: y = -\frac{\cancel{250}}{3} \cdot \frac{13}{\cancel{1000}_{4}} x + b$$

$$\Rightarrow r: y = -\frac{13}{12} x + b \quad \text{e} \quad \frac{250}{3} = -\frac{13}{12} \cdot 0 + b$$

$$\Rightarrow \boxed{r: y = -\frac{13}{12} x + \frac{250}{3}}$$

Sol.(b): Temos:

$$y = -\frac{13}{12} x + \frac{250}{3} \xRightarrow{\cdot 12} 13x + 12y = 1000.$$

Assim, por ser $13 = 12 \cdot 1 + 1$ temos que $13 + 12(-1) = 1$. Mas, isso nos leva a $13 \cdot 1000 + 12 \cdot (-1000) = 1000$. Temos também que $1000 = 12 \cdot 83 + 4$, e com isso $13 \cdot 4 + 12 \cdot 79 = 1000$. Logo, todas as soluções $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ são da forma $x = 4 + 12t$ e $y = 79 - 13t$, $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Isto é,

$$(x, y) \in \{(4 + 12t, 79 - 13t);\ t \leq 6,\ t \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Portanto,

$$\boxed{(x, y) \in \{(4, 79), (16, 66), (28, 53), (40, 40), (52, 27), (64, 14), (76, 1)\}.}$$

MYi

Questão 07 [1,25 ::: (a)=0,25; (b)=1,00]

Seja n um inteiro positivo.

(a) Determine o polinômio $q(X)$ tal que $X^{n+1} - 1 = (X-1) \cdot q(X)$.

(b) Mostre que, se n é par, então o polinômio $q(X)$ encontrado no item (a) não tem nenhuma raiz real.

não possui raiz real.

Sol. (a):

Como

$$X^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

$$X^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$$

$$x^4 - 1 = (x-1)(x^3+x^2+x+1)$$

$$\vdots$$

$$X^{n+1} - 1 = (x-1)(x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1)$$

Então

$$\boxed{q(x) = X^n + X^{n-1} + \dots + X + 1.}$$

Sol. (b):

Suponha que n seja par e $q(a) = 0$ para algum $a \in \mathbb{R}$. Então, $a^n + a^{n-1} + \dots + a + 1 = 0$. Com isso, supondo $a \neq 1$, pelo item anterior, temos que

$$\frac{a^{n+1} - 1}{a-1} = 0.$$

Logo, $a^{n+1} - 1 = 0$. Ou seja, $a^{n+1} = 1$.

Mas, como n é par, então $n+1$ é ímpar e, neste caso, somente podemos ter $a = 1$ como solução de $a^{n+1} = 1$.

Uma contradição. Portanto, se n é par então $q(x)$ não possui raízes reais.

my

Questão 08 [1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]

Considere a_n a quantidade de sequências de n termos, todos pertencentes a $\{0,1\}$, que não possuem dois termos consecutivos iguais a 0.

(a) Determine a_1 e a_2.

(b) Encontre uma relação de recorrência de segunda ordem para a sequência a_n.

Solução (a): Temos:

sequências de 1 termo → 0, 1 $\Rightarrow$ $\boxed{a_1 = 2.}$

sequências de 2 termos → 01, 10, 11, ~~00~~ (não pode ter zeros consecutivos) $\Rightarrow$ $\boxed{a_2 = 3.}$

Solução (b): Entendendo a quantidade de sequências de 3 termos (a_3):

Primeiro termo → 1 → segundo termo → 1, 0 $\Rightarrow$ RECAI EM DESCOBRIR A QUANTIDADE a_2

Primeiro termo → 0 → segundo termo → $\underbrace{1}_{\text{não pode ser zero}}$ $\Rightarrow$ RECAI EM DESCOBRIR A QUANTIDADE a_1.

Logo, $a_3 = a_2 + a_1$.

Assim, para a quantidade a_n, se o primeiro termo for igual a 1 recairá em descobrir a quantidade a_{n-1} e se o primeiro termo for igual a 0 então recairá em descobrir a quantidade a_{n-2}. Portanto, $\boxed{a_n = a_{n-2} + a_{n-1}.}$