Universidade do Estado do Amazonas

Aritmética – MA14 – PROFMAT

Prof. Alessandro Monteiro/ Prof. Almir Neto

Substitutiva

Instruções: Você tem 120 minutos para completar esta avaliação e só poderá deixar a sala após 60 minutos do seu início. Existem seis problemas, dos quais você deve **escolher apenas cinco** deles, totalizando dez pontos. Não é permitido o uso de livros, anotações, folhas de rascunho, celulares, calculadoras ou dispositivos semelhantes. **Serão concedidos pontos parciais pelos progressos nas soluções corretas. Todas as respostas devem ser colocadas à caneta.**

Nome: Gabarito

Circule as questões escolhidas	Pontos
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Total	

Manaus, 12 de dezembro de 2024

Questão 01 [2,0 ::: (a)=1,25; (b)=0,75]

Considere o número inteiro a representado, na base 10, por $a = a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$.

(a) Mostre que a é divisível por 27 ou por 37 se, e somente se, $a_n a_{n-1} \ldots a_3 + a_2 a_1 a_0$ tem a mesma propriedade.

(b) Mostre que o número representado, na base 10, por $8x2$ não é divisível por 37. Conclua que se x é diferente de zero então o inteiro representado por $x1234567$ também não é divisível por 37.

Demonstração (a): Faça $b = a_n a_{n-1} \cdots a_3$ e $c = a_2 a_1 a_0$. Então $a = 1000b + c = 999b + b + c = 27 \cdot 37 b + (b + c)$. Logo, a é divisível por 27 ou 37 se, e somente se, $b + c = a_n a_{n-1} \cdots a_3 + a_2 a_1 a_0$ é divisível por 27 ou 37.

Solução (b):

i) $8x2 = 800 + 10x + 2 = 802 + 10x = 37 \cdot 21 + 25 + 10x = 37 \cdot 21 + 5(2x + 5)$ não é divisível por 37, pois $5 \leq 2x + 5 \leq 23$.

ii) $x1234 + 567 = x1801$ e $x1 + 801 = 8x2 \Rightarrow x1234567$ não é divisível por 37, uma vez que $8x2$ também não é divisível por 37.

Questão 02 [2,0 ::: (a)=1,75; (b) = 0,25]

Um repunit é um número inteiro escrito na base 10 como uma sequência de números formada apenas pelo algarismo 1, tais como 11, 111 ou 1111. Cada um desses números tem a forma $\frac{10^n - 1}{9}$, onde $n \in \mathbb{N}$. Usamos o símbolo R_n para denotar o número que consiste em *n* números 1 consecutivos.

(a) Mostre que se $n|m$ então $R_n | R_m$.

(b) Mostre que uma sequência de 81 números 1 divide uma sequência de 2025 números 1.

Demonstração (a):

$n|m \Rightarrow m = n \cdot k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 10^m - 1 = 10^{nk} - 1 = (10^n)^k - 1^k$

$\Rightarrow 10^n - 1 \mid 10^m - 1$, pois $10^n - 1 \mid (10^n)^k - 1^k$

$\Rightarrow (10^n - 1) \cdot s = 10^m - 1, \; s \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \left(\frac{10^n - 1}{9}\right) \cdot s = \frac{10^m - 1}{9}$

$\Rightarrow R_n | R_m.$

Demonstração (b):

$2025 = 3^4 \cdot 5^2 = 81 \cdot 25 \Rightarrow 81 | 2025$

$\overset{(a)}{\Rightarrow} R_{81} | R_{2025}.$

Questão 03 [2,0]

Determine todas as soluções (x, y), com x e y positivos, que satisfazem a seguinte equação diofantina:

$$11x + 13y = 369.$$

Solução: Como $(11,13) = 1 \mid 369$ então a equação possui solução. Além disso, temos que:

$$\begin{cases} 13 = 11 \cdot 1 + 2 \\ 11 = 2 \cdot 5 + 1 \end{cases} \Rightarrow 1 = 11 - 2 \cdot 5 = 11 - (13 - 11) \cdot 5 = 6 \cdot 11 - 5 \cdot 13.$$

Assim, $11 \cdot (6 \cdot 369) + 13 \cdot (-5 \cdot 369) = 369$. Por ser $369 = 28 \cdot 13 + 5$, temos também que $11 \cdot 6 \cdot (28 \cdot 13 + 5) + 13 \cdot (-5 \cdot 369) = 369$. Logo, $11 \cdot 30 + 13 \cdot 3 = 369$. Deste modo, $x_0 = 30$ e $y_0 = 3$ é uma solução particular e todas as soluções positivos ($x > 0$ e $y > 0$) são dadas por:

$$x = 30 + 13t \text{ e } y = 3 - 11t, \text{ onde } \underbrace{-\frac{30}{13} < \overset{\mathbb{Z}}{\underset{}{t}} < \frac{3}{11}}_{t \in \{-2, -1, 0\}}.$$

Portanto, as soluções (x,y), com x e y positivos, são:

$$(4, 25), (17, 14) \text{ e } (30, 3).$$

Questão 04 [2,0 ::: (a)=0,5; (b)=1,5]

(a) Enuncie o Pequeno Teorema de Fermat.

(b) Mostre que se p é um primo ímpar, então

$$1^p + 2^p + \cdots + (p-1)^p \equiv 0\ (mod\ p).$$

(A) Peq. Teo. de Fermat. Se p = primo e $a \in \mathbb{Z}$, então $a^p \equiv a \pmod{p}$.

(B) Dem.

Pelo Peq. Teo. de Fermat, temos que:

$$j^p \equiv j \pmod{p},\ \forall\, 1 \leq j \leq p-1$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{p-1} j^p \equiv \sum_{j=1}^{p-1} j \pmod{p}.\ \text{MAS,}$$

$$\sum_{j=1}^{p-1} j = 1+2+\ldots+(p-1) = p\cdot\left(\frac{p-1}{2}\right) \equiv 0 \pmod{p},\ \text{logo}$$

$$1^p + 2^p + \ldots + (p-1)^p \equiv 0 \pmod{p}\ \square$$

Questão 05 [2,0]

Um inteiro, compreendido entre 1 e 1200, deixa os restos 1, 2 e 6 quando dividido por 9, 11 e 13, respectivamente. Determine esse inteiro.

Solução. Temos que $x \in \mathbb{Z}$ é tal que $1 < x < 1200$ e

838

$$x \equiv 1 \pmod 9$$
$$x \equiv 2 \pmod{11}$$
$$x \equiv 6 \pmod{13}.$$

Como $mdc(9,11) = mdc(9,13) = mdc(11,13) = 1$, temos, pelo Teo. Chinês do Resto, que tal sist. tem solução única módulo $M = 9 \times 11 \times 13 = 1287$.

$$M_1 = 11 \times 13 = 143 \quad M_2 = 9 \times 13 = 117, \ M_3 = 9 \times 11 = 99$$

$143x \equiv 1 \pmod 9 \Rightarrow 8x \equiv 1 \pmod 9 \Rightarrow x \equiv 8 \pmod 9$

$117x \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 7x \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow x \equiv 8 \pmod{11}$

$99x \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow 8x \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow x \equiv 5 \pmod{13}$. Logo,

$$X = 1 \times 143 \times 8 + 2 \times 117 \times 8 + 6 \times 99 \times 5 = 5986 \equiv 838 \pmod{1287}.$$

Portanto, $x = 838$.

Questão 06 [2,0 ::: (a)=1,0; (b)=1,0]

A sequência de Fibonacci, (f_n), é definida recursivamente por $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$,

$>$

para $n \geq 2$, com termos iniciais $f_1 = f_2 = 1$.

(a) Mostre que $mdc(f_n, f_{n+1}) = 1$, para todo $n \geq 1$.

(b) A sequência de Lucas, (L_n), é definida recursivamente por $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ para $n \geq 3$, com termos iniciais $L_1 = 1$ e $L_2 = 3$. Mostre que $L_n = f_{n-1} + f_{n+1}$, ~~para~~ para todo $n \geq 3$.

(A) Dem. Indução sobre n.

$n=1$: $mdc(f_1, f_2) = mdc(1,1) = 1$.

Hip. Indut.: $mdc(f_n, f_{n+1}) = 1$

$mdc(f_{n+1}, f_{n+2}) = mdc(f_{n+1}, f_{n+1} + f_n)$

$= mdc(f_{n+1}, f_n)$

$\overset{HI}{=} 1$ □

(B) Dem. Indução "forte" sobre n.

$n=3$: $L_3 = 4 = 1+3 = f_2 + f_4$.

Hip. Indutiv.: $L_k = f_{k-1} + f_{k+1}$, para todo $3 \leq k \leq n$.

$L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$

$\overset{HI}{=} f_{n-1} + f_{n+1} + f_{n-2} + f_n$

$= (f_{n-1} + f_{n-2}) + (f_{n+1} + f_n)$

$= f_n + f_{n+2}$ □