Gabarito

Questões Para o Simulado do PROFMAT – 2025

Professor Alessandro Monteiro

Manaus, 21 de fevereiro de 2025

Questão 00 [1,25 ::: (a)=0,75; (b)=0,50]

Seja $a = a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$ um inteiro representado na base 10.

(a) Mostre que a é divisível por 7, 11 ou 13 se, e somente se, $a_n a_{n-1} \ldots a_3 - a_2 a_1 a_0$ tem a mesma propriedade.

(b) Encontre todos os valores de x para os quais o número de sete dígitos $x123456$, escrito na base 10, é divisível por 7.

Demonstração (a): Considere $x = a_n a_{n-1} \cdots a_3$ e $y = a_2 a_1 a_0$. Então temos que $a = 1000x + y = (1001 - 1)x + y$. Isto é,

$$a = 1001x - (x - y) = 7 \cdot 11 \cdot 13 x - (x - y).$$

Logo, a é divisível por 7, 11 ou 13 se, e somente se, $x - y = a_n a_{n-1} \cdots a_3 - a_2 a_1 a_0$ tem a mesma propriedade.

Solução (b): Temos que:

$$
\begin{aligned}
7 \mid x123456 &\overset{(a)}{\iff} 7 \mid x123 - 456 \\
&\iff 7 \mid (x-1)667, \quad x \neq 0 \text{ e } x \neq 1 \\
&\overset{(a)}{\iff} 7 \mid (x-1) - 667 \\
&\iff 7 \mid 667 - (x-1), \quad x \in \{2, 3, \ldots, 9\}.
\end{aligned}
$$

Para $x = 2$, temos que $667 - (x-1) = 666 = 7 \cdot 95 + 1$. Logo, o único valor favorável é $x = 3$.

Outra solução (b): Temos que:

$$x123456 \equiv 0 \mod 7 \iff x.10^6 + 123456 \equiv 0 \mod 7$$

$$\iff x + 4 \equiv 0 \mod 7, \ x \in \{1, 2, \dots, 9\}.$$

Como $x+4 \in \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$ então o único valor possível é $x = 3$.

Questão 00 [1,25 ::: (a)=1,00; (b)=0,25]

Um repunit é um número inteiro escrito na base 10 como uma sequência de números formada apenas pelo algarismo 1, tais como 11, 111 ou 1111. Cada um desses números tem a forma $\dfrac{10^n - 1}{9}$, onde $n \in \mathbb{N}$. Usamos o símbolo R_n para denotar o número que consiste em n números 1 consecutivos.

(a) Sejam $m,n \in \mathbb{N}$. Mostre que é possível escrever $R_{m+n} = \alpha \cdot R_m + \beta \cdot R_n$ para determinados $\alpha, \beta \in \overset{\mathbb{Z}}{\cancel{\mathbb{R}}}$, isto é, podemos escrever R_{m+n} como uma combinação linear de R_m e R_n.

(b) Mostre que se $d \mid R_m$ e $d \mid R_n$ então $d \mid R_{m+n}$.

Solução (a): Se $R_{m+n} = \alpha . R_m + \beta . R_n$ então

$$\frac{10^{m+n} - 1}{9} = \frac{\alpha . (10^m - 1)}{9} + \frac{\beta (10^n - 1)}{9}.$$

Assim, $10^n . 10^m - 1 = \alpha . 10^m - (\alpha - \beta . 10^n + \beta)$. Logo, podemos tomar $\alpha = 10^n$ e $\alpha - \beta . 10^n + \beta = 1$. Isto é, $\alpha = 10^n$ e $\beta = 1$.

Solução (b):

$$d \mid R_m \text{ e } d \mid R_n \Rightarrow d \mid \alpha . R_m \text{ e } d \mid \beta . R_n, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow d \mid \alpha . R_m + \beta . R_n, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$$

$$\overset{(a)}{\Rightarrow} d \mid R_{m+n}.$$

Outra solução (a): Como

$$R_{m+n} = \frac{10^{m+n}-1}{9} = \frac{10^m \cdot 10^n - 1}{9} = \frac{10^m \cdot 10^n - 10^n + 10^n - 1}{9}$$

$$= 10^n \cdot \frac{(10^m - 1)}{9} + 1 \cdot \frac{10^n - 1}{9}$$

$$= 10^n \cdot R_m + 1 \cdot R_n$$

Então podemos tomar $\alpha = 10^n$ e $\beta = 1$.

Observação: Note que fazendo-se

$$\frac{10^{m+n}-1}{9} = \frac{10^n \cdot 10^m - 10^m + 10^m - 1}{9}$$

encontraremos $\alpha = 1$ e $\beta = 10^m$.

Questão 00 [~~2,0~~ 1,25 ::: (a)=1,00; (b)=0,25]

Considere um triângulo equilátero. Este triângulo é considerado o estágio número 0 do triângulo de Sierpinski. Então, o triângulo central obtido pela união dos pontos médios de cada lado é removido. Este é considerado o estágio número 1 do triângulo de Sierpinski. O estágio número 2 é obtido quando de cada um dos três triângulos restantes o triângulo central é removido, como foi feito no triângulo inicial ao passar do estágio número 0 para o estágio número 1 (veja a figura abaixo):

Figura: triângulo de Sierpinski, respectivamente, nos estágios 0, 1, 2, 3 e 4.

(a) Note que existe uma quantidade total de triângulos nos estágios 0, 1 e 2, dada~~s~~ respectivamente por 1, 5 e 17. Supondo que no estágio n essa quantidade possa ser calculada por $T(n) = a \cdot b^n + c$, encontre os valores reais de a, b e c.

(b) Encontre $T(7)$.

Solução (a): Se $T(0) = a \cdot b^0 + c = 1$, $T(1) = a \cdot b^1 + c = 5$ e $T(2) = a \cdot b^2 + c = 17$,

então $T(1) - T(0) = a(b-1) = 4$ e $T(2) - T(1) = ab(b-1) = 12$. Assim,

$\dfrac{ab(b-1)}{\underbrace{a(b-1)}_{b \neq 1}} = \dfrac{12}{4}$. Logo, $b = 3$, $a = \dfrac{4}{3-1} = 2$ e $c = 1 - 2 = -1$.

Solução (b): Como pelo item (a) $T(n) = 2 \cdot 3^n - 1$, então

$T(7) = 2 \cdot 3^7 - 1 = 2 \cdot 3^3 \cdot 3^4 - 1 = 54 \cdot 81 - 1 = 4374 - 1 = 4373$.

Outra solução (a): Sendo $T(n) = a \cdot b^n + c$, $T(0) = 1$, $T(1) = 5$ e $T(2) = 17$, temos que:

- $T(0) = 1$
- $T(1) = 3 \cdot T(0) + 2 = 3 \cdot T(0) + (3^1 - 1)$
- $T(2) = 3 \cdot T(1) + 2 = 3(3 \cdot T(0) + 2) + 2 = 9 \cdot T(0) + 8$
  $= 3^2 \cdot T(0) + (3^2 - 1)$
- $T(3) = 3 \cdot T(2) + 2 = 27 \cdot T(0) + 26$
  $= 3^3 \cdot T(0) + (3^3 - 1)$

$\vdots$

- $T(n) = 3 \cdot T(n-1) + 2 = 3^n \cdot T(0) + (3^n - 1)$
  $= 3^n \cdot 1 + 3^n - 1$
  $= 2 \cdot 3^n - 1$.

Logo, $a = 2$, $b = 3$ e $c = -1$.