Professor Alessandro Monteiro

MA 11 – Números e Funções Reais

Lista 03

---

01. Defina Função Exponencial.

---

02. Mostre que se $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ é tal que $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$, então não podemos ter $f(x)=0$, a menos que f seja identicamente nula.

---

03. Prove que se $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ é tal que $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ e f não é identicamente nula então $f(x)>0$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

---

04. Mostre que a função $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}_+$, definida por $f(x)=a^x$ com 0 < a ≠ 1, é ilimitada superiormente.

---

05. Prove que a função $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}_+^*$, definida por $f(x)=a^x$ com 0 < a ≠ 1, é sobrejetiva.

---

06. Seja $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}_+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente). As seguintes afirmações são equivalentes:

i) $f(nx)=f(x)^n$ para todo $n\in\mathbb{Z}$ e todo $x\in\mathbb{R}$;

ii) $f(x)=a^x$ para todo $x\in\mathbb{R}$, onde $a=f(1)$;

iii) $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ para quaisquer $x,y\in\mathbb{R}$.

---

07. Seja $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=ba^x$, uma função do tipo exponencial. Se $x_1,x_2,\dots,x_n\dots$ é uma progressão aritmética de razão h, isto é, $x_{n+1}=x_n+h$, então os valores

$$f(x_1)=ba^{x_1},\ f(x_2)=ba^{x_2},\dots,\ f(x_n)=ba^{x_n},\dots$$

formam uma progressão geométrica de razão a^h.

---

08. Seja $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) que transforma toda progressão aritmética $x_1,x_2,\dots,x_n\dots$ numa progressão geométrica $y_1,y_2,\dots,y_n\dots$, $y_n=f(x_n)$. Se pusermos $b=f(0)$ e $a=\dfrac{f(1)}{f(0)}$ teremos $f(x)=b\cdot a^x$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

---

09. (ENQ 2022/1 – QUESTÃO 05 – 1,25)

Prove que uma função do tipo exponencial fica determinada quando se conhecem dois de seus valores.
Mais precisamente, se $f(x) = b \cdot a^x$ e $F(x) = B \cdot A^x$ são tais que $f(x_1) = F(x_1)$ e $f(x_2) = F(x_2)$ com $x_1 \neq x_2$, então $a = A$ e $b = B$ (a e A são números reais positivos diferentes de 1, b e B são números reais não nulos).

10. (ENQ 2023/2 – QUESTÃO 01 – 0,75 + 0,50)

Seja b um número real positivo e diferente de 1.

(a) Use que $b^{u+v} = b^u \cdot b^v$, para todo $u, v \in \mathbb{R}$, para demonstrar a identidade

$$\log_b (xy) = \log_b x + \log_b y, \text{ para } x, y \text{ números reais positivos.}$$

(b) Utilizando a identidade do item (a) e sem supor válida qualquer outra propriedade do logaritmo, prove que

$$\log_b \left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2} \log_b x, \text{ para } x \text{ real positivo.}$$

11. (ENQ 2024/1 – QUESTÃO 07 – 0,75 + 0,50)

Seja $f(x) = x \cdot 2^x$, com x real e positivo.

(a) Prove que $f(x)$ é estritamente crescente, e portanto injetiva, no intervalo $(0, +\infty)$.

(b) Sabendo que $f(c) = 12$, determine x em função de c na equação $x \cdot 8^x = 4$.

12. (ENQ 2025/1 – QUESTÃO 04 – 0,25 + 1,00)

Considere a função definida para todo $x \in \mathbb{R}$ pela expressão $f(x) = \dfrac{5^x + 5^{-x}}{2}$.

(a) Use a desigualdade das médias para provar que $f(x) \geqslant 1$, para todo x real.

(b) Prove que $f(x) = a$ tem solução para todo $a \geqslant 1$ e determine tais soluções.