Universidade do Estado do Amazonas

Números e Funções Reais – MA11 – PROFMAT

Prof. Almir Neto / Prof. Alessandro Monteiro

AP3

Instruções: Você tem 120 minutos para completar esta avaliação e só poderá deixar a sala após 60 minutos do seu início. Existem seis problemas, dos quais você deverá escolher apenas cinco. A prova vale um total de dez pontos. Você não pode usar livros, anotações, folhas de rascunho, celulares, calculadoras ou aparelhos similares. **Serão concedidos pontos parciais pelos progressos nas soluções corretas. Todas as respostas devem ser colocadas à caneta.**

Nome: ____

Questões	Pontos
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Total	

Manaus, 24 de junho de 2025

Questão 01 [2,0]

Sejam a e b números reais não negativos. Mostre que:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}.$$

Questão 02 [2,0 ::: (a)=1,00; (b)=1,00]

Sejam $f: A \to B$ e $g, h: B \to C$ funções. Mostre que:

(a) Se f é sobrejetiva e $g \circ f = h \circ f$, então $g = h$.

(b) Se g é injetiva e $g \circ f$ é sobrejetiva, então f é sobrejetiva.

Questão 03 [2,0]

Prove, por indução, que $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dica: Lembre-se que $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$

Questão 04 [2,0 ::: (a)=1,00; (b)=1,00]

Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=2024^{x}+2025^{x}+2024^{-x}+2025^{-x}+2026$.

(a) Use a desigualdade das médias para mostrar que $f(x)\geq 2030$, para todo $x\in\mathbb{R}$.

(b) Determine a imagem de f.

Questão 05 [2,0 ::: (a)=0,75; (b)=1,25]

Seja $f:\mathbb{R}-\{-1,1\}\to\mathbb{R}-\{-1,1\}$ uma função dada por $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$, para todo $x\neq\pm 1$.

(a) Mostre que $f^{(2)}(x)=x=Id_X$ e $f^{(3)}(x)=f$, onde $f^{(n)}=\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n}$.

(b) Suponha que $f^{(2k-1)}=f$ e $f^{(2k)}=Id_X$, com $k\geq 1$. Mostre que $f^{(2k+1)}=f$ e $f^{(2k+2)}=Id_X$. Conclua que

$$f^{(n)}=\begin{cases} f, \text{ se } n \text{ for ímpar} \\ Id_X, \text{ se } n \text{ for par.}\end{cases}$$

Questão 06 [2,0 ::: (a)=1,0; (b)=1,0]

Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função periódica e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função afim.

(a) A função composta $g \circ f$ é necessariamente periódica? Em caso afirmativo, demonstre; em caso negativo, apresente um contraexemplo.

(b) A função composta $f \circ g$ é necessariamente periódica? Em caso afirmativo, demonstre; em caso negativo, apresente um contraexemplo.