Universidade do Estado do Amazonas

Aritmética – MA14 – PROFMAT

Prof. Alessandro Monteiro/ Prof. Almir Neto

AP1

Instruções: Você tem 120 minutos para completar esta avaliação e só poderá deixar a sala após 60 minutos do seu início. Existem cinco problemas valendo um total dez pontos. Você não pode usar livros, anotações, folhas de rascunho, celulares, calculadoras ou aparelhos similares. **Serão concedidos pontos parciais pelos progressos nas soluções corretas. Todas as respostas devem ser colocadas à caneta.**

Nome: ______________________________

Questões	Pontos
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Manaus, 18 de setembro de 2025

Questão 01 [2,0 ::: (a)=1,25; (b)=0,75]

(a) Se $a+b\neq 0$, mostre que, para todo $n\in\mathbb{N}$,

$$\frac{a^{2n}-b^{2n}}{a+b}=a^{2n-1}-a^{2n-2}\cdot b+\cdots+a\cdot b^{2n-2}-b^{2n-1}.$$

(b) Mostre que, para todos $a,m,n\in\mathbb{Z}$,

$$m>n\geq 0\Rightarrow a^{2^n}+1\,\Big|\,a^{2^m}-1\,.$$

Questão 02 [2,0 ::: (a)=1,25; (b)=0,75]

Considere o número natural a representado, na base 10, por $a = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$.

(a) Mostre que a é divisível por 3 (respectivamente por 9) se, e somente se, $a_0 + a_1 + \dots + a_n$ é divisível 3 (respectivamente por 9).

(b) Mostre que o inteiro $\underbrace{202600\dots02}_{2026\ \textit{dígitos}}$ não é um quadrado perfeito.

Questão 03 [2,0 ::: (a)=1,00; (b)=1,00]

Sejam dados os números naturais a, m e n tais que $1 < a < m < n$.

(a) Mostre que a quantidade de múltiplos de a que existem entre m e n é dada por $\left[\frac{n-1}{a}\right] - \left[\frac{m}{a}\right]$, onde $\left[\frac{n-1}{a}\right]$ e $\left[\frac{m}{a}\right]$ representam, respectivamente, as partes inteiras das divisões de $n-1$ e m por a.

(b) Sejam os conjuntos $X = \{x \in \mathbb{N}; 6 < x < 2026\}$, $A = \{a \in X; a \text{ é divisível por } 7\}$ e $B = \{b \in X; b \text{ é divisível por } 8\}$. Encontre a quantidade de elementos de $A \cap B$ e $A \cup B$.

Questão 04 [2,0 ::: (a)=0,50; (b)=0,50; (c)=1,00]

Seja $\dfrac{43}{30} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4}}} := [a_1; a_2, a_3, a_4]$ onde $a_1 \in \mathbb{Z}$ e $a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{Z}_+^*$.

(a) Encontre o valor de $\sum_{i=1}^{4} a_i$.

(b) Encontre um k tal que $[a_1; a_2, a_3, a_4] - [a_1; a_2, a_3] = \dfrac{(-1)^k}{k}$ e use este resultado para exibir os valores de $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $43m + 30n = 1$.

(c) Quantas soluções em $\mathbb{N} \cup \{0\}$ possui a equação $43X + 30Y = 2026$?

Questão 05 [2,0 ::: (a)=1,00; (b)=1,00]

(a) Mostre que 2^{2026} não divide $2026!$

(b) Mostre que 2^{1013} divide o produto $1014 \times 1015 \times \cdots \times 2025 \times 2026$