
Universidade do Estado do Amazonas

Introdução à Análise Matemática - ESN0655 – MN

Professor Alessandro Monteiro

AP2

Instruções: Você tem 120 minutos para completar esta avaliação e só poderá deixar a sala após 60 minutos do seu início. Existem cinco problemas valendo um total de dez pontos. Você não pode usar livros, anotações, folhas de rascunho, celulares, calculadoras ou aparelhos similares. Use os espaços abaixo das questões para pequenos rascunhos. **Serão concedidos pontos parciais pelos progressos nas soluções corretas.**

Todas as respostas devem ser colocadas à caneta na coluna II ao lado das perguntas.

Nome: _____

Gabriel to

Questões	Pontos
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

²⁵
Manaus, ~~26~~ de novembro de 2025

01 (vale 2,0 pontos). Mario mente aos sábados, domingos e segunda, e fala a verdade nos outros dias da semana. Luigi mente as quartas, quintas e sextas, e fala a verdade nos outros dias da semana. Se hoje ambos dizem que mentiram ontem, que dia da semana é hoje?

- a) Domingo
b) Sábado
c) Sexta
d) Quinta
e) Quarta

Resposta: b) Sábado

Justificativa:

	D	S	T	Q	Q	S	S
M	X	X	✓	✓	✓	✓	X
L	✓	✓	✓	X	X	X	✓

02 (vale ~~0,25~~ ponto cada item). Analise cada sentença abaixo e classifique em **V**, se for verdadeira, e **F** se for falsa. **Se for falsa, mostre um contraexemplo.**

- I. Toda sequência ilimitada é monótona;
- II. Toda sequência convergente é monótona;
- III. Toda sequência crescente é ilimitada;
- IV. Toda sequência limitada é convergente.
- V. Toda sequência monótona possui uma subsequência convergente.

Respostas:

- I. (F)
- II. (F)
- III. (F)
- IV. (F)
- V. (F)

Contraejemplos:

- I. ~~$x_n = (-1)^n \cdot n$~~ $x_n = (-1)^n \cdot n$
- II. $x_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \rightarrow 0$ e oscila
simais
- III. $\left| x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- IV. $x_n = (-1)^n = (-1, 1, -1, 1, \dots)$ diverge
 $\rightarrow |x_n| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- V. $x_n = n$ não possui sub. conv.

03 (vale 2,0 pontos). Prove que toda sequência convergente é limitada.

Utilize apenas o espaço abaixo para rascunhos! Nenhuma outra folha de rascunho é permitida!

Demonstração:

Seja x_n uma sequência de números reais tal que $x_n \rightarrow a$. Temos:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Agora, para $\varepsilon = 1 > 0$, é válido que:

$$\begin{aligned} n > n_0 &\Rightarrow |x_n| = |(x_n - a) + a| \\ &\leq |x_n - a| + |a| \\ &< 1 + |a|. \end{aligned}$$

Tomando-se

$$K = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{n_0}|, 1 + |a|\}$$

temos que $|x_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Portanto, toda sequência convergente é limitada.

04 (vale 2,0 pontos). Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ limitados e não vazios. Defina:

$$A - B = \{x - y; x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

Prove que:

$$= \{a - b; a \in A \text{ e } b \in B\}$$

$$\sup(A - B) = \sup A - \inf B.$$

Utilize apenas o espaço abaixo para rascunhos! Nenhuma outra folha de rascunho é permitida!

Demonstração:

Como $\sup A \geq a$ para todo $a \in A$ e $\inf B \leq b$ para todo $b \in B$, então:

$$\begin{cases} a \leq \sup A \\ -b \leq -\inf B \end{cases} \Rightarrow \sup A - \inf B \geq a - b \quad \forall a \in A \text{ e } b \in B.$$

Assim $\sup A - \inf B$ é uma superior para $A - B$.

Seja $\varepsilon > 0$ qualquer. Então

$$\sup A - \frac{\varepsilon}{2} < a \quad \text{e} \quad \inf B + \frac{\varepsilon}{2} > b$$

para algum $a \in A$ e $b \in B$. Ou

seja,

$$\begin{cases} \sup A - \frac{\varepsilon}{2} < a \\ -\inf B - \frac{\varepsilon}{2} < -b \end{cases} \Rightarrow (\sup A - \inf B) - \varepsilon < a - b$$

Logo $\sup A - \inf B$ é ^a menor das cotas superiores para $A - B$.

Portanto,

$$\sup(A - B) = \sup A - \inf B.$$

05 (vale 2,0 pontos). Seja $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência monótona decrescente e limitada inferiormente. Mostre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = \inf \{x_n; n \in \mathbb{N}\}.$$

Utilize apenas o espaço abaixo para rascunhos! Nenhuma outra folha de rascunho é permitida!

Demonstração:

Como x_n é limitada inferiormente então existe $m \in \mathbb{R}$ tal que

$$m = \inf \{x_n; n \in \mathbb{N}\}.$$

Assim, $m \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Seja $\varepsilon \in (0, +\infty)$. Temos:

$$m + \varepsilon > x_{n_0} \text{ para algum } n_0 \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$n > n_0 \Rightarrow m \leq x_n \leq x_{n_0} < m + \varepsilon.$$

$$\Rightarrow m - \varepsilon < m \leq x_n < m + \varepsilon$$

$$\Rightarrow |x_n - m| < \varepsilon.$$

Portanto,

$$\lim x_n = \inf \{x_n; n \in \mathbb{N}\}.$$