
Universidade do Estado do Amazonas

Aritmética – MA14 – PROFMAT

Prof. Alessandro Monteiro/ Prof. Almir Neto

AP1

Instruções: Você tem 120 minutos para completar esta avaliação e só poderá deixar a sala após 60 minutos do seu início. Existem cinco problemas valendo um total dez pontos. Você não pode usar livros, anotações, folhas de rascunho, celulares, calculadoras ou aparelhos similares. **Serão concedidos pontos parciais pelos progressos nas soluções corretas. Todas as respostas devem ser colocadas à caneta.**

Nome: _____

Yalvito

Questões	Pontos
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Manaus, 18 de setembro de 2025

Questão 01 [2,0 :: (a)=1,25; (b)=0,75]

(a) Se $a+b \neq 0$, mostre que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{a^{2n} - b^{2n}}{a+b} = a^{2n-1} - a^{2n-2} \cdot b + \dots + a \cdot b^{2n-2} - b^{2n-1}.$$

(b) Mostre que, para todos $a, m, n \in \mathbb{Z}$,

$$m > n \geq 0 \Rightarrow a^{2^n} + 1 \mid a^{2^m} - 1.$$

Demonstração (a): Como $x^m - y^m = (x-y)(x^{m-1} + x^{m-2}y + \dots + xy^{m-2} + y^{m-1})$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{Z}$ e $m \in \mathbb{N}$ então tomando-se $x=a$, $y=-b$ e $m=2n$, onde $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$a^{2n} - (-b)^{2n} = (a - (-b))(a^{2n-1} + a^{2n-2} \cdot (-b) + \dots + a \cdot (-b)^{2n-2} + (-b)^{2n-1}).$$

Logo, por ser $a+b \neq 0$ temos também que

$$\frac{a^{2n} - b^{2n}}{a+b} = a^{2n-1} - a^{2n-2} \cdot b + \dots + a \cdot b^{2n-2} - b^{2n-1}.$$

Demonstração (b): Como $m > n \geq 0$, onde $a, m, n \in \mathbb{Z}$, então deve existir $p \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + p$. Assim

$$a^{2^m} - 1 = a^{2^{n+p}} - 1 = (a^{2^n})^{2^p} - 1^{2^p}.$$

$$\text{Mas } a^{2^n} + 1 \mid (a^{2^n})^{2^p} - 1^{2^p}.$$

Logo,

$$m > n \geq 0 \Rightarrow a^{2^n} + 1 \mid a^{2^m} - 1.$$

Questão 02 [2,0 :: (a)=1,25; (b)=0,75]

Considere o número natural a representado, na base 10, por
 $a = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$.

(a) Mostre que a é divisível por 3 (respectivamente por 9) se, e somente se, $a_0 + a_1 + \dots + a_n$ é divisível 3 (respectivamente por 9).

(b) Mostre que o inteiro $\underbrace{202600\dots02}_{2026 \text{ dígitos}}$ não é um quadrado perfeito.

Demonstração (a): Temos que

$$a = \underbrace{a_n(10^n - 1) + a_{n-1}(10^{n-1} - 1) + \dots + a_1(10 - 1)}_b + a_0 + a_1 + \dots + a_n.$$

Como $3|b$ e $9|b$, uma vez que $9|10^m - 1 \ \forall m \in \mathbb{N}$, então a é divisível por 3 (respectivamente por 9) se, e somente se, $a_0 + a_1 + \dots + a_n$ é divisível por 3 (respectivamente por 9).

Demonstração (b): O número $\underbrace{202600\dots02}_{2026 \text{ dígitos}}$ é divisível

por 3, pois $2+0+2+6+0+0+\dots+0+2 = 12$. Mas não é divisível por 9 pelo que foi demonstrado no item (a). $\frac{12}{3} = 4$ e $\frac{12}{9} \neq \text{inteiro}$

Logo não pode ser um quadrado perfeito.

Questão 03 [2,0 :: (a)=1,00; (b)=1,00]

Sejam dados os números naturais a , m e n tais que $1 < a < m < n$.

(a) Mostre que a quantidade de múltiplos de a que existem entre m e n é dada por $\left\lfloor \frac{n-1}{a} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m}{a} \right\rfloor$, onde $\left\lfloor \frac{n-1}{a} \right\rfloor$ e $\left\lfloor \frac{m}{a} \right\rfloor$ representam, respectivamente, as partes inteiras das divisões de $n-1$ e m por a .

(b) Sejam os conjuntos $X = \{x \in \mathbb{N}; 6 < x < 2026\}$, $A = \{a \in X; a \text{ é divisível por } 7\}$ e $B = \{b \in X; b \text{ é divisível por } 8\}$. Encontre a quantidade de elementos de $A \cap B$ e $A \cup B$.

506

36

Questão 04 [2,0 :: (a)=0,50; (b)=0,50; (c)=1,00]

Seja $\frac{43}{30} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4}}} := [a_1; a_2, a_3, a_4]$ onde $a_1 \in \mathbb{Z}$ e $a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{Z}_+^*$.

(a) Encontre o valor de $\sum_{i=1}^4 a_i$. $= 10$

(b) Encontre um k tal que $[a_1; a_2, a_3, a_4] - [a_1; a_2, a_3] = \frac{(-1)^k}{k}$ e use este resultado para exibir os valores de $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $43m + 30n = 1$.

(c) Quantas soluções em $\mathbb{N} \cup \{0\}$ possui a equação $43X + 30Y = 2026$?

apenas uma

