Professor Alessandro Monteiro

MA 11 – Números e Funções Reais

Lista 02

---

01. Prove que a função afim é crescente (decrescente) se, e somente se, a taxa de variação for positiva (negativa).

---

02. (TFP) Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ crescente. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

i) $f(nx)=nf(x)$ para todo $n\in\mathbb{Z}$ e para todo $x\in\mathbb{R}$.

ii) Pondo $a=f(1)$, tem-se que $f(x)=ax$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

iii) $f(x+y)=f(x)+f(y)$ para todos $x,y\in\mathbb{R}$.

---

03. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ monótona injetiva. Mostre que se o acréscimo $f(x+h)-f(x)=\varphi(h)$ depender apenas de h, mas não de x, então f é uma função afim.

---

04. Prove a recíproca do resultado anterior.

---

05. Considere a função quadrática definida por $f(x)=ax^2+bx+c$. Prove que se a > 0 então f admite um valor mínimo $y=-\dfrac{\Delta}{4a}$, onde $\Delta=b^2-4ac$, e este valor ocorre quando $x=-\dfrac{b}{2a}$. Estabeleça e prove um resultado similar para o caso em que a < 0.

---

06. Sejam a, b e c reais com a diferente de zero e $f(x)=ax^2+bx+c$ para cada x em $\mathbb{R}$. Mostre que se a > 0 então f é decrescente em $\left(-\infty,-\dfrac{b}{2a}\right]$ e crescente em $\left[-\dfrac{b}{2a},+\infty\right)$. Estabeleça e prove um resultado similar para o caso em que a < 0.

---

07. Seja f uma função quadrática de domínio e contradomínio reais definida por $f(x)=ax^2+bx+c$, onde a é não nulo. Mostre que se a > 0 então $\mathrm{Im}(f)=\left[-\dfrac{\Delta}{4a},+\infty\right)$. Estabeleça e prove um resultado similar para o caso em que a < 0.

---

08. Seja $f(x)=ax^2+bx+c$, $\Delta>0$ e $x_1<x_2$ os zeros da função. Prove que se a > 0, então f(x) < 0 se, e somente se, $x\in(x_1,x_2)$. Estabeleça resultados similares a fim de comprovar o estudo do sinal de uma função quadrática para qualquer caso possível.

---

09. (MA 11 – 2011)

(1.0) (a) Quais são os valores de y para os quais existe uma função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(1) = 3$, $f(2) = 5$ e $f(3) = y$?

(1.0) (b) Tome $y = 9$ e determine a função quadrática correspondente. Justifique seus argumentos.

---

10. (MA 11 – 2011)

(1.0) (a) Seja $f : A \to B$ uma função. Dê as definições de $f(X)$ e $f^{-1}(Y)$, para $X \subset A$ e $Y \subset B$. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$, determine os conjuntos $f(\mathbb{R})$ e $f^{-1}(3)$.

(1.0) (b) Seja $f : A \to B$ uma função. Prove que $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$, quaisquer que sejam $X, Y \subset A$. Dê um exemplo em que $f(X \cap Y) \neq f(X) \cap f(Y)$.

---

11. (MA11 – 2012)

Questão 2. A *imagem* (ou conjunto de valores) de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é o conjunto $f(\mathbb{R})$ cujos elementos são os números $f(x)$, onde x é qualquer número real.

Determine as imagens da função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = rx + s$, e da função quadrática $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = ax^2 + bx + c$. Discuta as possibilidades e justifique suas afirmações.

---

12. (MA 11 – 2013)

Considere a função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$, com $a > 0$. Use a forma canônica do trinômio de segundo grau

$$y = a\,(x - x_0)^2 + y_0$$

para mostrar que:

a) (x_0, y_0) é um ponto de mínimo absoluto de f; (*pontuação 1,0*)

b) a reta $x = x_0$ é um eixo de simetria vertical do gráfico de f. (*pontuação 1,0*)

---

13. (MA 11 – 2013)

Considere a função $p : [-1, 5] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\begin{cases} 3\,x - x^2 & \text{se} \quad -1 \leqslant x < 1 \\ ||x - 2| - 1| & \text{se} \quad 1 \leqslant x \leqslant 5 \end{cases}$$

(a) Faça um esboço do gráfico de p. (*pontuação 0,5*)

(b) Determine todas as soluções reais da equação $p(x) = 2$. (*pontuação 0,5*)

(c) Determine todos os pontos de máximo e de mínimo locais e absolutos de p. (*pontuação 0,5*)

(d) Faça um esboço do gráfico da função $q : [-1, 2]] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$q(x) = p(2x + 1) - 2\,.$$

---

14. (ENQ 2025 – QUESTÃO 08 – 0,5 + 0,75)

Seja $f(x) = x^2 + x$. Mostre que

(a) Para todos $r, s \in \mathbb{R}$, $f\left(\frac{r+s}{2}\right) \leqslant \frac{f(r)+f(s)}{2}$.

(b) Mais geralmente, mostre que se $0 < \beta < 1$, então

$$f(\beta r + (1-\beta)s) \leqslant \beta f(r) + (1-\beta) f(s), \text{ para todos } r, s \in \mathbb{R}.$$

---

15. (ENQ 2024 – QUESTÃO 03 – 0,75 + 0,50)

Um polinômio $p(x)$ de coeficientes reais é tal que $p(0) = 1$, $p(2) = 3$ e $p(3) = 3$.

(a) Determine o único polinômio do segundo grau nas condições dadas.

(b) Exiba, caso exista, um polinômio do terceiro grau nas condições dadas.

---

16. (ENQ 2023 – QUESTÃO 06 – 0,5 + 0,75)

Considere a sequência $1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, \ldots$ formada por duplas de números inteiros iguais, iniciando em $1, 1$, sendo cada número da dupla seguinte o sucessor do número da dupla anterior.

Seja $f(n)$ a **soma** dos n primeiros termos da sequência acima.

(a) Calcule $f(23)$ e $f(50)$.

(b) Determine expressões para $f(n)$ em função de n, no caso em que n é par e no caso em que n é ímpar.

---

17. (ENQ 2022 – QUESTÃO 03 – 0,5 + 0,75)

(a) Sejam x e y números reais.
Prove que $\sqrt{x^2 + y^2} \geqslant \frac{|x+y|}{\sqrt{2}}$ e que a igualdade é verificada se, e somente se, $x = y$.

(b) Sejam a e b reais tais que $a + b = 1$.
Determine os valores de a e b tais que $\sqrt{(a-9)^2 + (b-13)^2}$ tem o menor valor possível.

---

18. (ENQ 2021 – QUESTÃO 04 – 1,25)

Sejam r e s raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ em que a, b e c são números reais dois a dois distintos, com a e c não nulos. Suponha que, **nesta ordem**, a, c e b estão em progressão aritmética e também que, $\frac{1}{r} + \frac{1}{s}, r + s, r^2 + s^2$ estão em progressão geométrica, nesta ordem. Mostre que $\frac{c}{a} = \frac{1}{6}$.

---

19. (ENQ 2020 – QUESTÃO 01 – 1,25)

Determine a equação da reta tangente à parábola $y = x^2 + x + 1$ no ponto $P = (1, 3)$ usando o seguinte procedimento:

- Escreva a equação de uma reta r passando pelo ponto $P = (1, 3)$ com inclinação m.
- Determine m de modo que a interseção entre a parábola $y = x^2 + x + 1$ e a reta r tenha um único ponto, no caso o ponto P.

---

20. (ENQ 2020 – QUESTÃO 02 – 1,25)

Para cada sentença abaixo, diga se ela é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Existe um número real x tal que $5x + 7 < 2 - x < 7x + 8$.

(b) Se x é um número real tal que $x > 3$, então $\dfrac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 4x + 3} \geqslant 0$.

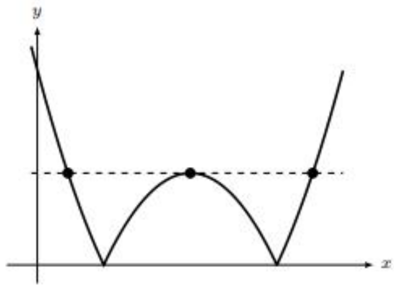
(c) Para todo número real x, tem-se que $x < 1 \Longrightarrow x^2 < 1$.

---

21. (ENQ 2026 – QUESTÃO 08 – 1,25)

Sejam a, h e k são números reais, $a > 0$. Considere a função quadrática $f(x) = a(x - h)^2 + k$.

Abaixo está o esboço do gráfico da função $g(x) = |f(x)|$.



Sobre o gráfico sabe-se que: os três pontos destacados são colineares, um deles é o vértice do arco de parábola e as coordenadas dos outros dois são $(1, 3)$ e $(9, 3)$.

(a) Mostre que se $x \neq x'$ e $f(x) = f(x')$ então $x + x' = 2h$.

(b) Determine os valores dos parâmetros a, h e k.