1^a Avaliação de Números e Funções

Almir Neto / Alessandro Monteiro

Nome:

Questão 1. (2 pts) Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + + \frac{1}{n}$. Prove, por indução, que

$$n + H_1 + H_2 + \ldots + H_{n-1} = nH_n, \forall\ n \geq 2.$$

.

Dica: Durante a demonstração da tese indutiva, note que $H_n + \frac{1}{n+1} = H_{n+1}$

Questão 2. (2 pts) Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções tais que f é sobrejetiva e $g \circ f$ é injetiva. Mostre que g é injetiva.

Questão 3. (2 pts) Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções tais que:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \geq 0 \\ x - 1, & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x \geq 1 \\ 2x, & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

Determine a composta $(g \circ f)$.

Questão 4. (2 pts) Sejam x e y números reais positivos.

a) Mostre que $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$.

b) Seja $x \in \mathbb{R}^*$. Mostre que o valor mínimo de $x^2 + \frac{1}{x^2}$ é 2.

Questão 5. (2 pts) Determine os valores $x \in \mathbb{R}$ tais que $|2x - 3| \leq x + 1$.