Universidade do Estado do Amazonas

Números e Funções Reais – MA11 – PROFMAT

Prof. Alessandro Monteiro/ Prof. Almir Neto

AP2

Instruções: Você tem 120 minutos para completar esta avaliação e só poderá deixar a sala após 60 minutos do seu início. Existem cinco problemas valendo um total dez pontos. Você não pode usar livros, anotações, folhas de rascunho, celulares, calculadoras ou aparelhos similares. **Serão concedidos pontos parciais pelos progressos nas soluções corretas. Todas as respostas devem ser colocadas à caneta.**

Nome: Gabarito

Questões	Pontos
1	
2	
3	
4	
5	
Total	10,0

Manaus, 18 de junho de 2026

Questão 01 [2,0 ::: (a)=0,75; (b)=1,25]

Defina uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pondo $f(x)=\begin{cases}2026x, & x\in\mathbb{Q}\\ 2027x, & x\in\mathbb{I}\end{cases}$. Prove ou dê um contraexemplo:

(a) A função f é linear.

(b) Se $n\in\mathbb{Z}$ então $f(nx)=nf(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

Contraexemplo (a): Tome $x=1$ e $y=\sqrt{2}$. Temos que:

$$\begin{aligned} f(1+\sqrt{2}) &= 2027.(1+\sqrt{2}), \text{ pois } (1+\sqrt{2})\in\mathbb{I} \\ &= 2027+2027\sqrt{2} \\ &\neq 2026+2027\sqrt{2} \\ &= f(1)+f(\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Como não é válido que $f(x+y)=f(x)+f(y)$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$, então f não é linear.

Demonstração (b): Seja $n\in\mathbb{Z}$. Se $n=0$ então $f(nx)= = f(0.x)=f(0)=2026\cdot 0=0=0.f(x)=n.f(x)\ \forall\ x\in\mathbb{R}$. Se $n\in\mathbb{Z}^*$ e $x\in\mathbb{Q}$, então, por ser $nx\in\mathbb{Q}$, temos que $f(nx)=2026\cdot(nx)=n\cdot(2026x)=n.f(x)$. E, se $n\in\mathbb{Z}^*$ e $x\notin\mathbb{Q}$, temos, por $nx\in\mathbb{I}$, que $f(nx)=2027.(nx)= = n.(2027x)=n.f(x)$. Portanto, se $n\in\mathbb{Z}$ então $f(nx)=n.f(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

Questão 02 [2,0 ::: (a)=1,50; (b)=0,50]

Sejam a, b e c reais com $a \neq 0$ e $f(x) = ax^2 + bx + c$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

(a) Sendo $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ e $x_1 < x_2$ os zeros da função, mostre que se $a > 0$ então $f(x) < 0$ se, e somente se, $x \in (x_1, x_2)$.

(b) Resolva a inequação: $(x^2 + 2025)(2027x^2 - 2026x - 1) < 0$.

Demonstração (a): Temos que:

$$
\begin{aligned}
f(x) < 0 &\iff ax^2 + bx + c < 0 \\
&\iff a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] < 0 \\
&\overset{(a>0)}{\iff} \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} < 0 \\
&\iff \left|x + \frac{b}{2a}\right| < \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\
&\iff -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} < x + \frac{b}{2a} < \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\
&\iff \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} < x < \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\
&\iff x \in \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right).
\end{aligned}
$$

Sendo $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ e $x_1 < x_2$ os zeros de f, podemos concluir, a partir de $a > 0$, que $f(x) < 0$ se, e somente se, $x \in (x_1, x_2)$.

Solução (b): Como $x^2 + 2025$ é sempre positiva, então basta que $f(x) = 2027x^2 - 2026x - 1$ seja negativa. Por serem $x_1 = -1/2027$ e $x_2 = 1$ as raízes de f então temos que $(x^2 + 2025)(2027x^2 - 2026x - 1) < 0$ se, e somente se, $x \in (-1/2027, 1)$. Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R};\ -1/2027 < x < 1\}$.

Questão 03 [2,0 ::: (a)=1,50; (b)=0,50]

Seja $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ uma função que satisfaz as seguintes condições: $f(1)=1$, $f(2n)=2f(n)+1$ e $f(f(n))=4n+1$.

(a) Mostre, por indução, que $f(2^n)=2^{n+1}-1$.

(b) Calcule $f(31)$.

Demonstração (a): Seja a proposição $P(n)$: $f(2^n)=2^{n+1}-1$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Temos que $P(1)$ é verdadeira, pois

$$f(2^1)=f(2\cdot 1)=2f(1)+1=2\cdot 1+1=3=2^{1+1}-1.$$

Suponhamos que $P(k)$ seja verdadeira, $k\geq 1$, temos:

$$f(2^{k+1})=f(2\cdot 2^k)=2\cdot f(2^k)+1\overset{hip.}{=}2\cdot(2^{k+1}-1)+1=2^{k+2}-1.$$

Isto é, $p(k+1)$ também é verdadeira. Portanto, pelo PIM, temos que $P(n)$: $f(2^n)=2^{n+1}-1$ é verdadeira para todo natural maior ou igual a 1.

Solução (b): Pelo item (a), temos que:

$$f(2^4)=2^5-1=31 \Rightarrow f(f(16))=f(31).$$

Mas, usando que $f(f(n))=4n+1$, podemos concluir que:

$$f(31)=4\cdot 16+1=65.$$

Questão 04 [2,0 ::: (a)=1,00; (b)=1,00]

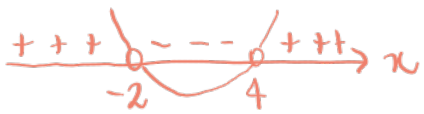
Sobre funções exponenciais e logarítmicas, responda:

(a) Se f é uma função definida por $f(x) = \log_{x+1}\left(x^2 - 2x - 8\right)$ então qual o domínio de f?

(b) Qual o conjunto solução da inequação $4^{3x-1} > 3^{4x}$?

Solução (a): Temos que:

i) $x^2 - 2x - 8 > 0 \Rightarrow x < -2$ ou $x > 4$;



ii) $0 < (x+1) \neq 1 \Rightarrow -1 < x \neq 0.$

Assim, deve ocorrer que $x < -2$ ou $x > 4$ e $-1 < x \neq 0$.
Ou seja, $x > 4$. Logo,

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R};\ x > 4\}.$$

Solução (b): Vejamos:

$$4^{3x-1} > 3^{4x} \Rightarrow \log 4^{3x-1} > \log 3^{4x}$$

$$\Rightarrow (3x-1)\cdot\log 4 > 4x\cdot\log 3$$

$$\Rightarrow x(3\log 4 - 4\log 3) > \log 4$$

$$\Rightarrow x\cdot\log\left(\frac{4^3}{3^4}\right) > \log 4$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} x < \frac{\log 4}{\log\left(\frac{64}{81}\right)} = \frac{2\cdot\log 2}{2\cdot\log\frac{8}{9}} = \log_{8/9} 2.$$

$\boxed{(*) \text{ pois } \log\left(\frac{64}{81}\right) < 0}$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R};\ x < \log_{8/9} 2\}.$

Questão 05 [2,0 ::: (a)=1,0; (b)=1,0]

(a) O teorema das raízes racionais (ou teste das raízes racionais) afirma que se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, com $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, é um polinômio, onde $\frac{p}{q}$ é uma raiz racional de $P(x)$, ou seja, $P\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $mdc(p,q) = 1$, então p é um divisor de a_0 e q é um divisor de a_n. Use este teorema para mostrar que a raiz quadrada do número primo 2027 é irracional.

(b) Prove que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos\left(x\sqrt{2027}\right) + \cos x$ não é periódica.

Demonstração (a): Suponha que $x = \sqrt{2027} \in \mathbb{Q}$. Assim $x^2 - 2027 = 0$. Mas, pelo teorema das raízes racionais, se $x = \frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $mdc(p,q) = 1$, então $p \in \{\pm 1, \pm 2027\}$, pois p é primo, e $q \in \{\pm 1\}$. Logo, $x \in \{\pm 1, \pm 2027\}$. Porém, temos que $(-1)^2 - 2027 \neq 0$, $1^2 - 2027 \neq 0$, $(-2027)^2 - 2027 \neq 0$ e $2027^2 - 2027 \neq 0$, o que é uma contradição. Portanto, $\sqrt{2027}$ é irracional.

Demonstração (b): Suponha que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos(x\sqrt{2027}) + \cos x$ seja periódica. Assim, deve existir $T \in \mathbb{R}^*$ tal que $f(x+T) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Desta forma, temos: $\cos((x+T)\sqrt{2027}) + \cos(x+T) = \cos(x\sqrt{2027}) + \cos x$. Em particular, para $x = 0$, temos $\cos(T\sqrt{2027}) + \cos T = 1 + 1 = 2$. Como $\cos(T\sqrt{2027}) \leq 1$ e $\cos T \leq 1$ então $\cos(T\sqrt{2027}) + \cos T \leq 2$. Mas, a igualdade ocorre quando $\cos(T\sqrt{2027}) = \cos T = 1$. Logo, $T\sqrt{2027} = 2K_1\pi$ e $T = 2K_2\pi$, com $K_1, K_2 \in \mathbb{Z}^*$. Isto é, $\sqrt{2027} = \frac{2K_1\pi}{T} = \frac{2K_1\pi}{2K_2\pi} = \frac{K_1}{K_2} \in \mathbb{Q}$. Uma contradição, uma vez que, pelo item (a), $\sqrt{2027}$ é irracional.