Professor Alessandro Monteiro
MA 11 – Números e Funções Reais
Lista 06 – Funções Trigonométricas

---

1. (MA11 – 2011)

Usando as fórmulas para $\cos(x+y)$ e $\text{sen}(x+y)$, prove que

$$\text{tg}(x-y) = \frac{\text{tg}(x) - \text{tg}(y)}{1 + \text{tg}(x)\cdot\text{tg}(y)}$$

(desde que $\text{tg}(x-y)$, $\text{tg}(x)$ e $\text{tg}(y)$ estejam definidas).

---

2. (MA11 – 2014)

Resolva a equação

$$\text{arctg}\left(\frac{1+x}{2}\right) + \text{arctg}\left(\frac{1-x}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

---

3. (MA11 – 2014)

(a) Mostre que, para qualquer número real x, vale a identidade

$$\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2 + \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2 = 1.$$

(b) Use o item anterior para mostrar que

$$\cos 2t = \frac{1-\text{tg}^2 t}{1+\text{tg}^2 t} \text{ e } \text{sen } 2t = \frac{2\text{tg } t}{1+\text{tg}^2 t}.$$

---

4. (MA11 – 2015)

Determine, no conjunto dos reais, os valores máximo e mínimo de

$$f(x) = 9\cos^4 x - 12\cos^3 x + 10\cos^2 x - 4\cos x + 1.$$

Sugestão: Observe que $9a^4 - 12a^3 + 10a^2 - 4a + 1 = \left(3a^2 - 2a + 1\right)^2$.

---

5. (MA11 – 2015)

Se a é irracional, prove que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(ax) + \cos x$ não é periódica.

---

6. (ENQ - 2013)

O objetivo desta questão é demonstrar que a função $f(x) = cos\,\sqrt{x}$, $x \geq 0$, não é periódica, ou seja, não existe nenhum número real positivo T tal que $cos\,\sqrt{x+T} = cos\,\sqrt{x}$ para todo $x \geq 0$.

a) Encontre todos os valores de $T \geq 0$ para os quais $f(T) = f(0)$ e, a seguir, encontre todos os valores de $T \geq 0$ para os quais $f(T) = f(2T)$.

b) Use o ítem a) para mostrar que $f(x)$ não é periódica.

---

7. (ENQ - 2015)

(a) Sabendo que $\text{sen}\, a + \text{sen}\, b = 2\,\text{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$, prove que

se $x, y \in (0, \pi)$ e $x \neq y$, então $\text{sen}\, x + \text{sen}\, y < 2\,\text{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)$.

(b) Use o resultado do item (a) para resolver a equação

$$\sqrt{\text{sen}(2x)\text{sen}\sqrt{x}} = \text{sen}\left(\frac{2x+\sqrt{x}}{2}\right),\ 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

---

8. (ENQ - 2015)

Determine todos os valores de $x \in \mathbb{R}$ tais que $(1-\cos^2 x)^{\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)} = 1$.

---

9. (ENQ – 2017)

Considere a função real definida por $f(x) = \sqrt{3}\,\text{sen}(x) + \cos(x)$.

(a) Determine $\alpha \in [0, 2\pi]$ para que f possa ser escrita na forma $f(x) = 2\,\text{sen}(x+\alpha)$.

(b) Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $\sqrt{3}\,\text{sen}(x) + \cos(x) = 2$.

---

10. (ENQ - 2018)

Considere as funções $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas pelas expressões abaixo:

$$f(t) = -t^2 + \sqrt{3}\,t + \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad g(x) = \sqrt{3}\,\text{sen}\, x + \frac{1}{2}\cos(2x).$$

(a) Encontre os valores máximo e mínimo de f e os valores reais t em que f assume tais valores.

(b) Encontre os valores máximo e mínimo de g e todos os valores reais x em que g assume tais valores.

---

11. (ENQ - 2018)

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita periódica quando existe um número real $T \neq 0$ tal que $f(x+T) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. O menor $T > 0$ com a propriedade anterior é chamado de *período* da função f.

Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = A\cos(Bx) + C$, em que os parâmetros A, B e C são números reais, com $A > 0$ e $B > 0$.

(a) Mostre que a função f é periódica e que o seu período é $\frac{2\pi}{B}$.

(b) Quais os valores máximo e mínimo da função f em função dos parâmetros?

(c) Determine os valores de A, B e C da função $f(x) = A\cos(Bx) + C$ cujo gráfico é dado pela figura abaixo.